Απ1.

No. Date 8/1/2018

Κανόνες L' Hospital

- Απροσδιόριστες Μορφές

Αν $A = \lim_{x \to c} f(x)$ και $B = \lim_{x \to c} g(x)$ με $B \neq 0$

γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Όμως αν $B = 0$ δε βγάζουμε συμπέρασμα

Παρόλα αυτά, εαν $A \neq 0$, τοτε το όριο της $\frac{f}{g}$ στο $x = c$ είναι άπειρο (όταν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$)

δηλαδή ή είναι $-\infty$ ή $+\infty$ ή δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$

Υποθέτω ότι το $\lim \frac{f}{g}$ υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$

Όντως: Έστω με άτοπο ότι $\lim \frac{f}{g} = \lambda \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ $\frac{f}{g}$ φραγμένη για $|x-c| < \delta$ $x \neq c$

$\rightsquigarrow$ $\exists M > 0$ τ.ω. $\left|\frac{f}{g}\right| \leq M$ $\forall x : |x-c| < \delta$ $x \neq c$

$\rightsquigarrow$ $|f(x)| \leq M|g(x)|$ $|x-c| < \delta$ $x \neq c$

$\rightsquigarrow$ $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ Άτοπο

Άσκηση

Ν.δ.ο. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x \sin\frac{1}{x}}$ δεν είναι ούτε $+\infty$ ούτε $-\infty$

Υπόδειξη: Θεωρ. $x_n \to 0$ $x_n \neq 0$ με $Q(x_n) \to +\infty$

$y_n \to 0$ $y_n \neq 0$ $Q(y_n) \to -\infty$

- Η περίπτωση $A=0$, $B=0$ λέγεται απροσδιόριστη μορφή
Συμβολ. $0/0$ [όλα τα ενδεχόμενα είναι πιθανά]

Π.χ. $f(x)=ax$ $g(x)=x$ $x\to 0$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x}=\lim_{x\to 0}a=a$$

Άλλες απροσδιόριστες μορφές: ∞/∞, $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0, $\infty-\infty$

Εμείς θα ασχοληθούμε με την $0/0$ και την ∞/∞
οι άλλες ανάγονται σε αυτές με κάποιο τέχνασμα

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{100}}$

Χρησιμοποιώ ανισότητα Bernoulli: $(1+y)^n \geq 1+ny$ $\forall n\geq 1$
$y>-1$

$e^x=(1+(e-1))^x$

Γενίκευση ανισότητα Bernoulli με μη φυσικό αριθμό

Άσκηση (για σπίτι): Ν.δ.ο. $(1+a)^x \geq 1+ax$ $\forall x>0$ όπου $a>0$ σταθερά

Υπόδειξη: Τα φέρνω όλα στο πρώτο μέλος, θέτω νέα συνάρτηση.
$(1+a)^x = e^{x\ln(1+a)}$, $(e^t)'=e^t$

∴ Ο αριθμητής φράσσεται από κάτω από αυτή τη συνάρτηση

$$e^x=\underbrace{(1+(e-1))^x}_{>0}\geq \underbrace{1+(e-1)x}_{\to+\infty \text{ καθώς } x\to+\infty},\quad x>0$$

No. Date

Άσκηση (Για σπίτι): Ν.δ.ο. $e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Προκαταρτικό Αποτέλεσμα

L'Hospital

Θεώρημα: Έστω f, g ορισμ. στο $[a,b]$ με $f(a)=g(a)=0$ και έστω $g(x)\neq 0 \quad \forall x \in (a,b]$. Εάν f, g διαφορ. στο a με $g'(a)\neq 0$. Τότε $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}$ $\exists$ (στο $\mathbb{R}$) και ισούται με $\frac{f'(a)}{g'(a)}$

Δηλαδή $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

(αφού f, g διαφορίσιμες στο a έπεται f, g συνεχείς στο a)

[Άσκηση (Για σπίτι): Ν.δ.ο. $g(a)=0 \quad g'(a)\neq 0$]

Απόδειξη (L'Hospital)

Αφού $f(a)=g(a)=0$, μπορούμε να γράψουμε

Για $x\in(a,b]$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

Ξέρουμε ότι $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \neq 0$$

Προειδοποίηση: Η υπόθεση $f(a)=g(a)=0$ είναι βασική

π.χ. εάν $f(x)=x+17 \quad g(x)=2x+3 \quad x\in\mathbb{R}$

Τότε $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{17}{3}$ ενώ $\frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{2}$

Εφαρμογή: $\lim_{x\to 0} \frac{\overset{f}{x^2+x}}{\underset{g}{\sin 2x}}$

έχουμε $0/0$, f,g ορίζονται σε γειτονιά του $x=0$

$f(0)=g(0)=0$

$g(x)\neq 0$ για $x\neq 0$ με x: γύρω από το 0

$g'(0) = 2\cos(2\cdot 0) = 2 \neq 0$

Αφού $g'(0)\neq 0$ και $g(0)=0 \Rightarrow g(x)\neq 0$.

Άρα $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$

Άσκηση (Για Σπίτι): Ν.Δ.Ο $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$ χωρίς L'Hospital

Υπόδειξη: διαιρώ με $2x$.

Στη συνέχεια για να μελετήσουμε περιπτώσεις όπου f ή g δεν είναι διαφορίσιμε στο a χρειαζόμαστε το ακόλουθο γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θ.Μ.Τ. Cauchy: Έστω f,g συνεχείς στο $[a,b]$ και διαφορίσιμες στο (a,b) και $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$. Τότε $\exists\, c\in(a,b)$ τ.ω. $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Παρατήρηση: Αν $g(x)=x$, τότε παίρνω το Θ.Μ.Τ.

Απόδειξη

Αφού $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$, από Θ. Rolle έχω ότι $g(a)\neq g(b)$ (αν όχι, τότε θα υπήρχε $\xi\in(a,b)$ με $g'(\xi)=0$ Άτοπο)

No. Date

Για $x \in [a,b]$ ορίζουμε

$$h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)-\left(f(x)+f(a)\right)$$

Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$, διαφορίσιμη στο (a,b) και $h(a)=h(b)=0$

* Ο τύπος πάνω προέρχεται από: $h(x) = Af(x)+Bg(x)+C$

$h(a)=0$

$h(b)=0$

$h(a)=h(b)=0$

Άρα από Θ. Rolle $\exists c \in (a,b)$ τ.ω. $h'(c)=0$

δηλ. $0=h'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,g'(c)-f'(c)=0$

Αφού $g'(c)\neq 0$ διότι $c \in (a,b)$ μπορώ να διαιρέσω με το $g'(c)$